**ЗАДАНИЕ 1**

**1 МОДЕЛИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ**

* 1. **Авторегрессионная модель AR(p)**

Авторегрессионная (AR-) модель ([англ.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B3%D0%BB%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) autoregressive model) — модель временных рядов, в которой значения временного ряда в данный момент линейно зависят от предыдущих значений этого же ряда. Авторегрессионный процесс порядка p (AR(p)-процесс) определяется следующим образом:{\displaystyle X\_{t}=c+\sum \_{i=1}^{p}a\_{i}X\_{t-i}+\varepsilon \_{t},}

где {\displaystyle a\_{1},\ldots ,a\_{p}}a параметры модели (коэффициенты авторегрессии), {\displaystyle c}

 постоянная (часто для упрощения предполагается равной нулю),

{\displaystyle \varepsilon \_{t}} [белый шум](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B5%D0%BB%D1%8B%D0%B9_%D1%88%D1%83%D0%BC).

Представим описание модели. Говорят, что последовательность  подчиняется авторогрессионной модели (autoregressive model) AR(*p*) порядка , если эволюция  описывается следующим уравнением в конечных разностях порядка :

. (2.15)

Введём величину



и перейдём к величинам . Подставляя в (2.15) , легко получить, что  подчиняется уравнению

, (2.16)

то есть в уравнении для  исчезло слагаемое . В дальнейшем мы будем в основном иметь дело с уравнением (2.16) для .

Рассмотрим сначала подробно случай , когда

.

Будем считать, что . Тогда имеем



и в силу того, что , ряд  сходится в среднеквадратичном смысле.

Итак, в этом случае

.

Отсюда следует, что , , так что

 

Найдём еще ковариации и коэффициенты корреляции для величин . Имеем:

, ,

и поэтому

.

Но, в силу некоррелированности ,  отлично от нуля (и равно 1) лишь тогда, когда , то есть тогда, когда . Поэтому

,

что и даёт явное выражение для ковариации этих величин. Отсюда .

Заметим, что  является нормальным случайным процессом в силу нормальности величин . Вследствии этого соотношение (2.16) принимает вид:

****. (2.17)

Представим оценку параметров.Для оценки параметров  модели (2.15) обычно применяют метод наименьших квадратов, когда оценки  параметров  ищутся из условия

.

Приравнивая нулю производные , получим следующую систему линейных уравнение для оценок  параметров :

(2.19)

решая которую найдём все интересующие нас оценки.

Оценка  величины  имеет вид

. (2.20)

В этой формуле вместо  должны быть подставлены их значения, полученные из решения системы (2.19).

В простейшем случае  система (2.19) принимает вид



откуда

 

.

* 1. **Рыночный индекс и его использование при моделировании поведения семейcтва ценных бумаг**

Для описания процесса изменения цен ценных бумаг в странах с развитой рыночной экономикой чаще всего используют так называемые факторные модели(factor models).

Простейшей является однофакторная модель, часто называемая также рыночной моделью(market model). В ней предполагается, что состояние всего рынка ценных бумаг можно охарактеризовать одной единственной величиной, называемой индексом рынка.

Индекс рынка, или рыночный индекс – показатель состояния и динамики рынка ценных бумаг. Через сопоставление текущего значения индекса с его предыдущими значениями можно оценить поведение рынка, его реакцию на те или иные изменения макроэкономической ситуации, различные корпоратиные события (слияния, поглащения, дробления акций, отставки и назначения ведущих менеджеров), спекулятивные процессы.

В зависимости от того, какие ценные бумаги составляют выборку, используемую при расчете индекса, он может характеризовать рынок в целом, рынок определенного класса ценных бумаг (государственные обязательства, корпоративные облигации, акции и т. п.), отраслевой рынок (ценные бумаги компаний одной отрасли: телекоммуникации, транспорт, страхование, Интернет-сектор и т. п.).

Сравнение динамики различных индексов может показать, какие сектора экономики развиваются самыми быстрыми темпами. Индекс может представлять национальный фондовый рынок в целом или определенную торговую площадку на этом рынке (например, индекс фондовой биржи). Фондовые индексы рассчитываются и публикуются различными организациями, чаще всего информационными или рейтинговыми агентствами и фондовыми биржами.

Чтобы фондовый индекс адекватно отражал процессы, происходящие на рынке ценных бумаг, и как можно меньше зависел от субъективных факторов, таких, как манипулирование ценами отдельных финансовых инструментов, корпоративная политика компаний-эмитентов, включающая новые эмиссии, дробление или консолидацию акций, выпуск варрантов и т.п., необходимо применять правильные и обоснованные методики расчета фондовых индексов. Кроме того, понимание методики расчета индекса необходимо для правильной интерпретации его изменений.

При определении методики вычисления фондовых индексов необходимо рассмотреть следующие вопросы:

* формулы вычисления фондовых индексов;
* достоверность и полнота информации, используемой при расчете фондовых индексов;
* порядок корректировки расчетной формулы, необходимость которой вызвана теми или иными корпоративными событиями, изменением рыночных условий.

Методика расчета индекса может время от времени меняться, что связано главным образом с различными корпоративными событиями, переживаемыми компаниями, ценные бумаги которых входят в состав индекса. Изменения могут касаться и перечня ценных бумаг, участвующих в расчете индекса.

Чем большую историю имеет фондовый индекс, тем большую ценность он представляет для прогнозирования будущей реакции рынка на те или иные события на основе его прошлого поведения. Но ситуация на рынке постоянно меняется - слияния и поглощение, банкротства старых компаний и появление новых, стремительно наращивающих свою капитализацию. Поэтому периодически появляется необходимость внести изменения в выборку, на основе которой рассчитывается индекс.

Если такие корректировки осуществлять редко, есть опасность, что индекс начнет отставать от развития рынка, если к корректировкам прибегать слишком часто - индекс начнет "терять" историю и, сохраняя прежнее название, отражать изменения уже другого сектора рынка.

Одним из наиболее широко известных индексов рынка является Standard & Poor’s Stock Price Index, коротко обозначаемый как S&P500. Он представляет собой средневзвешенную величину курсов акций 500 наиболее крупный компаний.

Другим индексом, который универсальнее S&P500 в том смысле, что он охатывает большее число акций, является NYSE Composite Index ( NYSE − New York Stock Exchange), для вычисления которого используются курсы акций компаний, зарегистрированных на NYSE.

Наиболее часто цитируемым в печати является так называемый индекс Доу-Джонса. Надо только иметь в виду, что есть несколько индексов Доу-Джонса. Тот, который упоминается в печати, − это так называемый DJIA (Dow Jones Industrial Average), который основан на курсах акций 30 крупнейших компаний и корпораций и который обеспечивает беспристрастную оценку ситуации на рынке акций. Кроме этого индекса имеются также Dow Jones Transportation Average, Dow Jones Utility Average и другие.

Отметим также NASDAQ Composite Index (MASDAQ − National Association of Securities Dealers Automated Quotations), AMEX Market Value Index. Имеются и другие индексы рынка, которые дают аналогичные результаты.

Пусть  есть индекс рынка в момент времени . Далее, пусть  есть цена -й ценной бумаги в этот же момент времени. Тогда модель имеет вид

,

где  и  − некоторые коэффициенты, специфичные для -й ценной бумаги.

Коэффициент  иногда называют чувствительностью (sensitivity) ценной бумаги к рыночному индексу .

Что касается величин , то они считаются независимыми случайными величинами с  и . Именно  определяют индивидуальные колебания цены каждой ценной бумаги.

Сам индекс рыночной активности, конечно, меняется со временем. Для описания его эволюции также чаще всего используют модели диффузионных случайных процессов. Наиболее употребительными моделями эволюции  являются:

* модель Дотхана;
* модель Кокса, Ингерсола и Росса
* модель Хо и Ли
* модели Халла и Уайта
* модель Блэка и Карасинского.